KONSTRUKSI MATRIKS SINGULAR DARI SUATU MATRIKS YANG MEMENUHI SIFAT KHUSUS

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

EKA WAHYUDININGSIH
10854002922

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

KONSTRUKSI MATRIKS SINGULAR DARI SUATU MATRIKS YANG MEMENUHI SIFAT KHUSUS

EKA WAHYUDININGSIH
NIM: 10854002922

Tanggal Sidang : 30 Oktober 2013
Periode Wisuda : Februari 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Mengkonstruksi matriks singular secara acak sangatlah susah. Sementara matriks singular sangat dibutuhkan dalam sistem kriptografi. Tugas akhir ini membahas empat cara mengkonstruksi matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus, yaitu dengan cara mereduksi suatu matriks yang memenuhi sifat khusus, menghapus baris dan kolom, mempertukarkan baris dan kolom, serta memilih matriks persegi secara acak dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus. Tugas akhir ini membuktikan bahwa keempat cara tersebut dapat menghasilkan matriks singular.

Katakunci : *Determinan, Matriks Singular, Sifat Khusus*

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Dalam penulisan, penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis telah banyak menerima petunjuk, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak. Untuk itu sudah sepantasnya bila penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Nasir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Dra. H. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Orang tuaku tercinta Yudianto dan Misrifah yang telah melimpahkan perhatian dan kasih sayang juga materi yang tak mungkin bisa terbalas.
6. Untuk adik-adikku, Fika Pujiati dan Tri Nur Wahyudi yang telah memberi semangat dan dukungan.
7. Sahabat-sahabatku Yespi, Delni, Netty, Rahma dan Irliya Serta teman-teman kosku, Yasrid, Roza, Citri, Ima, dan Fitri yang selalu memberi motivasi.
8. Bapak dan ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
9. Teman-teman matematika Angkatan 2008 serta para senior dan junior.
10. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis telah berusaha semaksimal mungkin dalam penyusunan tugas akhir ini. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 30 Oktober 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Aljabar linier merupakan cabang dari ilmu matematika yang didalamnya dikenal istilah matriks. Teori tentang matriks pertama kali dikembangkan oleh Arthur Cayley(1821-1895) pada 1857. Sekarang matriks telah menjadi alat yang berguna diberbagai bidang. Berdasarkan sifat operasinya, terdapat beberapa jenis matriks diantaranya yaitu matrik singular dan matrik nonsingular.

Matriks singular adalah jenis matriks yang amat jarang dibicarakan orang, yakni matriks yang memiliki determinan nol. Di buku-buku rujukan, baik matematika dasar maupun lanjut, matriks singular biasanya hanya dijelaskan dalam satu atau dua alinea saja. Tulisan ini bermaksud sedikit membedah sifat lanjutan matriks singular yang amat unik, yang biasanya luput dari perhatian orang.

Matriks singular digunakan dalam sistem kriptografi. Sistem kriptografi terdiri dari proses enskripsi dan deskripsi. Proses enskripsi dan deskripsi membutuhkan sistem persandian agar hasilnya tidak mudah dibaca oleh semua orang, sehingga dalam proses persandian dibutuhkan matriks yang bisa di acak dan harus sesuai dengan sifat-sifat matriks. Membentuk matriks yang nilai determinannya tidak nol secara acak sangat mudah, tetapi membentuk matriks singular secara acak sangat sulit.

Tahun 2012, K. Arulmani dan K.Chadrasekhara Rao menemukan metode baru untuk membentuk matriks singular dengan sifat khusus yang ditulis di dalam paper yang berjudul " *New Perspektif On a Singular Matrix Formation*" dan dilanjutkan dengan penelitian selanjutnya oleh K.arulmani didalam paper yang berjudul " *Reduction Theorem On a Singular Matrix With Special Properties*".

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji dan menelaah pembentukan matrik singular dengan judul "**Konstruksi Matriks Singular dari Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus ".**

1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana cara mengkonstruksikan sebuah matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.

1.3 BATASAN MASALAH

Adapun batasan masalah dalam penulisan tugas akhir ini adalah membahas mengenai bentuk matriks singular $n \times n$ dengan $n > 2$.

1.4 TUJUAN PENULISAN

Tujuan dari tugas akhir ini adalah untuk membentuk matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.

1.5 MANFAAT PENULISAN

Manfaat dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

a. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks.
b. Memberikan informasi kepada pembaca bagaimana cara mengkonstruksi matrik singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan terdiri dari lima bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisikan tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metode yang penulis gunakan dalam penyelesaian tugas akhir.

BAB IV Analisa dan Pembahasan

Bab ini membahas tentang hasil yang diperoleh dari konstruksi matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran dari seluruh pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori ini terdiri atas beberapa teori pendukung yang akan dipergunakan dalam pembentukan matrik singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Ruminta, 2009) Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis diantara dua tanda kurung, yaitu ( ) atau .

Objek matriks dapat berupa bilangan real, bilangan komplek, ataupun fungsi. Setiap bilangan yang terdapat dalam matriks disebut elemen matriks. Semua bilangan yang tersusun dalam jalur horizontal disebut baris dan bilangan yang tersusun dalam jalur vertikal disebut kolom.

Elemen matriks bisa dinyatakan dengan notasi a_{ij}, dengan i menyatakan baris dan j menyatakan kolom. Bentuk umum sebuah matriks dengan elemen a_{ij} dinyatakan sebagai berikut :

$$A_{mxn} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Matriks juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{mxn} = a_{ij}\ _{m\times n}$$

Dimana :

a_{ij} = elemen atau unsur matriks

i = $1,2,3,\cdots,m$, indeks matriks

j = $1,2,3,\cdots,n$, indeks kolom

2.2 Jenis – Jenis Matriks

Berdasarkan ordonya terdapat beberapa jenis matriks yaitu:

a. Matriks bujur sangkar/persegi yaitu matriks berordo $n \times n$ atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Contoh dari matriks bujur sangkar adalah sebagai berikut :

1. $B_{2x2} = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 12 \end{matrix}$

2. $B_{3x3} = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{matrix}$

b. Matriks baris yaitu matriks berordo $1 \times n$ atau hanya memiliki satu baris. Berikut ini adalah contoh matriks baris :

$C_{1x3} = \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \end{matrix}$

c. Matriks kolom yaitu matriks yang hanya memiliki satu kolom. Contoh matriks kolom adalah sebagai berikut :

1. $E_{2x1} = \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}$

2. $E_{3x1} = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$

d. Matriks tegak yaitu matriks berordo $m \times n$ dengan $m > n$. Contoh matriks tegak adalah sebagai berikut :

$A = \begin{matrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$

e. Matriks datar yaitu matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$. Contoh matriks datar adalah sebagai berikut :

$F = \begin{matrix} 3 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{matrix}$

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya terdapat beberapa jenis matriks yaitu:

a. Matriks nol yaitu matriks yang semua elemen penyusunnya nol. Contoh matriks nol adalah sebagai berikut :

$O_{1x3} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}$, $O_{2x2} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

b. Matriks diagonal adalah matriks dimana semua elemen diluar diagonal utamanya adalah nol dan minimal ada satu elemen pada elemen pada diagonal utamanya bukan nol. Contoh matriks diagonal adalah sebagai berikut :

$$D_{3\,x\,3} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

c. Matriks skalar yaitu matriks yang semua elemen pada diagonalnya sama. Contoh matriks skalar adalah sebagai berikut :

$$D_{3\,x\,3} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

d. Matriks simetri yaitu matriks persegi yang setiap elemennya selain elemen diagonal adalah simetri terhadap diagonal utama. Contoh matriks simetri adalah sebagai berikut :

$$F_{2\,x\,2} = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

e. Matriks simetri miring yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal saling berlawanan. Contoh matriks simetri miring adalah sebagai berikut :

$$G_{3\,x\,3} = \begin{matrix} 0 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{matrix}$$

f. Matriks identitas adalah matriks dimana semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu dan elemen diluar diagonal utama bernilai nol. Contoh matriks matriks identitas adalah sebagai berikut :

$$I_{2\times 2} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ O & 1 \end{matrix}, \quad I_{3\times 3} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

g. Matriks segitiga atas adalah matriks diagonal dimana elemen disebelah kanan (atas) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol. Contoh matriks segitiga atas adalah sebagai berikut :

$$A_{2\times 2} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix}, \qquad B_{3\times 3} = \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix}$$

h. Matriks segitiga bawah adalah matriks diagonal dimana elemen sebelah kiri (bawah) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol. Contoh matriks segitiga bawah adalah sebagai berikut :

$$A_{2\times 2} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}, \quad B_{3\times 3} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{matrix}$$

i. Matriks transpose yaitu matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom atau sebaliknya. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^T. Contoh matriks transpos adalah sebagai berikut :

$$A_{3\,x\,2} = \begin{matrix} 4 & 8 \\ 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{matrix} \text{ maka } A^T \text{ nya menjadi : } A_{2\,x\,3} = \begin{matrix} 4 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Berdasarkan sifat operasinya, matriks ada beberapa jenis matriks diantaranya:

a. Matriks singular (*singular matriks*) adalah matriks yang determinannya bernilai nol. Contoh matriks singular adalah sebagai berikut :

$$A_{2\times 2} = \begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix}, \quad B_{3\times 3} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}$$

b. Matriks non singular (*non singular matriks*) adalah matriks yang determinannya bernilai tidak sama dengan nol. Contoh matriks non singular adalah sebagai berikut :

$$A_{2\times 2} = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{matrix}, \quad B_{3\times 3} = \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}$$

2.3 Determinan Matriks

Definisi 2.2 (Ruminta, 2009) Determinan matriks adalah bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi n^2 elemen matriks bujur sangkar. Jika subskrip permutasi elemen matriks adalah genap diberi tanda positif (+) dan sebaliknya jika subskrip permutasi elemen matriks adalah ganjil maka diberi tanda negatif ($-$). Inversi terjadi jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutan subskrip permutasi elemen matriks.

Determinan matriks hanya didefinisikan pada matriks bujur sangkar (matriks kuadrat).

Notasi determinan matriks : det(A) =$|A|$ atau det A = $|A|$

Jika diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari matriks A:

$$\det A = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definisi 2.3 (Charles G Cullen, 1992) Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka anak matriks (*sub-matrix*) berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapuskan baris ke-i dan kolom ke-j dinamakan minor unsur (i, j) dari matriks A dan dilambangkan dengan M_{ij} atau $M_{ij}(A)$.

$$\text{Jika A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\text{Sedangkan } M_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Definisi 2.4 (Charles G Cullen, 1992) Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefenisikan sebagai

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M_{1j})$$

dan

$$det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Berdasarkan definisi tersebut, bisa diterapkan juga pada matriks A yang berukuran 3×3, maka diperoleh:

$$\det(A) = det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} detM_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} detM_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} detM_{13}$$

$$= a_{11} det \begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix} - a_{12} det \begin{matrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix} + a_{13} det \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}\ a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}\ a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2.3.1 Sifat-sifat Determinan

Sifat-sifat determinan adalah sebagai berikut :

1. det (A) = det(A^T). Contohnya adalah sebagai berikut :

   $A = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{matrix}$, $A^T = \begin{matrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{matrix}$

   $detA = 16$

2. Determinan dari matriks segitiga adalah hasil kali dari entri diagonal. Contohnya adalah sebagai berikut :

   $\begin{matrix} a & b \\ 0 & d \end{matrix} = \begin{matrix} a & 0 \\ c & d \end{matrix} = ad$

3. Jika salah satu baris atau kolom matriks A dipertukarkan dengan baris atau kolom lain, maka determinannya adalah –det(A). Contohnya adalah sebagai berikut :

   $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = - \begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix}$

4. Jika satu baris atau kolom dari suatu matriks A dikalikan dengan suatu skalar k maka determinannya adalah k.det(A). Contohnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{matrix} ka & kb \\ c & d \end{matrix} = \begin{matrix} a & b \\ kc & kd \end{matrix} = k \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Secara khusus, jika semua entri dalam satu baris adalah nol, maka determinannya adalah nol.

5. Jika setiap elemen pada satu baris atau kolom matriks A dikalikan dengan konstanta kemudian ditambahkan ke baris atau kolom lain tidak akan mengubah nilai determinan. Contohnya adalah sebagai berikut :

   Misal $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

   $|A| = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = \begin{matrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{matrix} = \begin{matrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{matrix}$

   Catatan : Jika satu baris atau kolom dari suatu matriks adalah kelipatan dari baris atau kolom lain, maka determinan dari matriks tersebut harus sama dengan nol.

6. Jika A dan B adalah matriks ukuran $n \times n$, maka det(AB) = det(A).det(B). Contohnya adalah sebagai berikut :

   Tentukan determinan dari matriks berikut:

   $A = \begin{matrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$, $AB = \begin{matrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{matrix}$

   det(AB) = $\begin{matrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{matrix}$ = 25 × 13 – 20 × 14 = 45

   det(A) = $\begin{matrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$ = 6 × 2 – 1 × 3 = 9

   det(B) = $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ = 4 × 2 – 3 × 1 = 5

   det(A).det(B) = det(AB) = 45

7. Jika dua baris atau kolom matriks A adalah sama (identik), maka det(A) = 0. Contohnya adalah sebagai berikut :

   $A = \begin{matrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{matrix}$

   Solusi :

   det(A) = $\begin{matrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{matrix}$ = 24 + 36 + 16 – 36 – 24 – 16 = 0

2.3.2 Menghitung Determinan

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu :

2.3.2.1 Aturan Sarrus

Perhitungan determinan matriks dengan metode sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks berukuran 2×2 dan 3×3.

Metode sarrus (metode spaghetti) menggunakan perkalian elemen matriks secara diagonal. Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (dari kiri atas ke kanan bawah) diberi tanda (+) sedangkan perkalian elemen matriks pada diagonal naik (dari kiri bawah ke kanan atas) diberi tanda negatif (-).

a. Determinan matriks ukuran 3 × 3

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Maka

$$\det(A) = |A| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari :

$$\begin{array}{ccccccc} & + & + & + & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ A = & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & - & - & & \end{array}$$

Contoh 2.1 :

Tentukan determinan matriks 3 × 3 berikut menggunakan aturan sarrus.

$$A = \begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = |A| = \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ 1 & 5 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$= 1 \times 0 \times 2 + 5 \times 2 \times 3 + -3 \times 1 \times -1 - 3 \times 0 \times -3 - -1 \times 2 \times 1 - 2 \times 1 \times 5$

= 0 + 30 + 3 − 0 − (– 2) – 10

= 33 – 8 = 25

2.3.2.2 Metode Minor-Kofaktor

Definisi 2.5 (Steven J. Leon, 2001) Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$ dan misalkan M_{ij} menyatakan matriks $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari A. Determinan dari M_{ij} disebut minor dari a_{ij} Sedangkan kofaktor dinotasikan dengan A_{ij} dari a_{ij} didefinisikan dengan

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

Jika diketahui suatu matriks A berukuran $n \times n$:

$$A = \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

a. Menentukan determinan berdasarkan baris matriks

   det(A) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, . (-1)^{i+j} det\ M_{ij}$

   det(A) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, . A_{ij}$, j = indeks kolom

   atau

   det(A) = $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in}$

   i = salah satu baris matriks

b. Menentukan determinan berdasarkan kolom matriks

   det(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, . (-1)^{i+j} det\ M_{ij}$

   det(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, . A_{ij}$, i = indeks baris atau

det(A) =$a_{1j}A_{1j}$ + $a_{2j}A_{2j}$ + $a_{3j}A_{3j}$ + $\cdots$ + $a_{nj}A_{nj}$

j = salah satu kolom matriks

Contoh 2.2 :

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor untuk matriks 4 × 4.

$$A = \begin{matrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

Menggunakan minor dan kofaktor pada baris ke-4

$$\det(A) = \begin{matrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{matrix} = 1\ A_{41} + 0A_{42} + 0A_{43} + (-4)A_{44}$$

$$A_{41} = -1^{\ 4+1} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$= -1 \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$= -\ 0(-1)^{2+1} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{matrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

=18

$$A_{44} = -1^{\ 4+4} \begin{matrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{matrix}$$

$$= -\ (-1)(-1)^{2+1} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{matrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{matrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -4$$

$$\det(A) = (1)\,A_{41} + (0)A_{42} + (0)\,A_{43} + (-4)\,A_{44}$$
$$= (1)(18) + (-4)(-4)$$
$$= 34$$

2.3.2.3 Reduksi Baris

Metode ini digunakan untuk menghindari perhitungan yang panjang dalam penerapan definisi determinan secara langsung. Determinan suatu matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut dalam bentuk eselon baris.

Teorema 2.1 Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$, maka $det(A)$ adalah hasilkali entri-entri pada diagonal utama, yaitu $\det(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$.

Contoh 2.3 :

Tentukan determinan matriks 4 × 4 berikut menggunakan reduksi baris.

$$B = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(B) = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$ baris 2 + (-2) baris 1, baris 3 +(-1) baris 1, baris 4 +(-2) baris 1

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{matrix}$$ baris 4 + ½ baris 3

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$= 1 \times -1 \times 2 \times -3$

$= 6$

2.4 Matriks singular

Definisi 2.6 (Ruminta, 2009) : Matriks singular adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

2.4.1.1 Sifat Khusus untuk Mengkonstruksi Matriks Singular

Misalkan matriks singular $A_{n \times n}$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Matriks A memenuhi sifat khusus jika dan hanya jika memenuhi sifat berikut:

$a_{11} + a_{22} - a_{21} = a_{12}$.

$a_{21} + a_{32} - a_{31} = a_{22}$.

$a_{31} + a_{42} - a_{41} = a_{32}$.

$a_{41} + a_{52} - a_{51} = a_{42}$.

$\vdots$

$a_{n-1\ 1} + a_{n2} - a_{n1} = a_{n-1\ 2}$.

$a_{12} + a_{23} - a_{22} = a_{13}$.

$a_{22} + a_{33} - a_{32} = a_{23}$.

$a_{32} + a_{43} - a_{42} = a_{33}$.

$a_{42} + a_{53} - a_{52} = a_{43}$.

$\vdots$

$a_{n-1\ 2} + a_{n3} - a_{n2} = a_{n-1\ 3}$.

$a_{13} + a_{24} - a_{23} = a_{14}$.

$a_{23} + a_{34} - a_{33} = a_{24}$.

$a_{33} + a_{44} - a_{43} = a_{34}$.

$a_{43} + a_{54} - a_{53} = a_{44}$.

$\vdots$

$a_{n-1\ 3} + a_{n4} - a_{n3} = a_{n-1\ 4}$.

$a_{14} + a_{25} - a_{24} = a_{15}$.

$a_{24} + a_{35} - a_{34} = a_{25}$.

$a_{34} + a_{45} - a_{44} = a_{35}$.

$a_{44} + a_{55} - a_{54} = a_{45}$.

$\vdots$

$a_{n-1\ 4} + a_{n5} - a_{n4} = a_{n-1\ 5}$.

$\vdots$

$a_{1(n-1)} + a_{2n} - a_{2(n-1)} = a_{1n}$.

$a_{2(n-1)} + a_{3n} - a_{3(n-1)} = a_{2n}$.

$a_{3(n-1)} + a_{4n} - a_{4(n-1)} = a_{3n}$.

$a_{4(n-1)} + a_{5n} - a_{5(n-1)} = a_{4n}$.

$\vdots$

$a_{n-1\ n-1} + a_{nn} - a_{n\ n-1} = a_{n-1\ n}$.

Sehingga diperoleh :

$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = \ldots = a_{n-1\ 1} - a_{n-1\ 2} = a_{n1} - a_{n2}$.

$a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = \ldots = a_{n-1\ 2} - a_{n-1\ 3} = a_{n2} - a_{n3}$.

$\vdots$

$a_{1(n-1)} - a_{1n} = a_{2(n-1)} - a_{2n} = \ldots = a_{n-1\ (n-1)} - a_{n-1\ n} = a_{n(n-1)} - a_{nn}$.

Persamaan di atas dapat ditulis secara umum sebagai berikut :

$a_{1j} - a_{1(j+1)} = a_{2j} - a_{2(j+1)} = \ldots = a_{nj} - a_{n(j+1)}$,

$\forall j = 1,2,3, \ldots, n-1$. (2.1)

Persamaan (2.1) dapat diperumum lagi menjadi :

$a_{ij} - a_{i(j+1)} = a_{(i+1)j} - a_{(i+1)(j+1)}$,

$\forall j = 1,2,3, \ldots, (n-1), i = 1,2,3, \ldots, n$. (2.2)

2.4.2 Teorema sifat khusus

Teorema 2.2 (K. Arulmani, 2012) : Setiap matrik yang dibentuk dengan menggunakan sifat khusus adalah singular.

Bukti :

Misalkan

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

memenuhi sifat khusus, artinya:

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = a_{31} - a_{32} \tag{2.3}$$

$$a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = a_{32} - a_{33} \tag{2.4}$$

Kasus 1, $a_{11} - a_{12} = 0$ atau $a_{12} - a_{13} = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{12}$ atau $a_{12} = a_{13}$.

Karena $a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = a_{31} - a_{32}$ dan $a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = a_{32} - a_{33}$ maka $a_{21} - a_{22} = 0$, $a_{31} - a_{32} = 0$ dan $a_{22} - a_{23} = 0$, $a_{32} - a_{33} = 0$ $\Leftrightarrow$ $a_{21} = a_{22}$, $a_{31} = a_{32}$ dan $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$. Berarti kolom pertama identik dengan kolom kedua atau kolom kedua identik dengan kolom ketiga. Karena entri dalam dua kolom identik maka det(A) = 0

Kasus 2, $a_{11} - a_{12} \neq 0$ atau $a_{12} - a_{13} \neq 0$. Kolom pertama dikurang kolom kedua didapatkan

$$A = \begin{matrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Karena $a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = a_{31} - a_{32}$, diperoleh

$$A = \begin{matrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} - a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} - a_{12} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Kurangkan kolom kedua dengan kolom ketiga didapatkan

$$A = \begin{matrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & a_{13} \\ a_{11} - a_{12} & a_{22} - a_{23} & a_{23} \\ a_{11} - a_{12} & a_{32} - a_{33} & a_{33} \end{matrix}$$

Karena $a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = a_{32} - a_{33}$, diperoleh

$$A = \begin{matrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & a_{13} \\ a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & a_{23} \\ a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & a_{33} \end{matrix}$$

Misalkan matriks B adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengalikan kolom pertama dengan $\frac{1}{a_{11}-a_{12}}$ dan kolom kedua dengan $\frac{1}{a_{12}-a_{13}}$, sehingga diperoleh

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 1 & 1 & a_{23} \\ 1 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$$

det (B) = $1 \begin{vmatrix} 1 & a_{23} \\ 1 & a_{33} \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & a_{23} \\ 1 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

det (B) = $(a_{33} - a_{23}) - (a_{33} - a_{23}) + a_{13}(1 - 1)$

det (B) = $(a_{33} - a_{23} - a_{33} + a_{23}) + a_{13}\,(0)$

det (B) = 0

Sehingga diperoleh det (A) = $\frac{1}{a_{11}-a_{12}} \cdot \frac{1}{a_{12}-a_{13}}$. det (B) = 0

Jadi, setiap matriks yang dikonstruksi menggunakan sifat khusus determinannya bernilai nol. ■

Contoh 2.4 :

Diketahui matriks A memenuhi sifat khusus

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 22 & 25 \\ 14 & 24 & 27 \\ 20 & 30 & 33 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa matriks A adalah matriks singular!

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 12 & 22 & 25 \\ 14 & 24 & 27 \\ 20 & 30 & 33 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & 22 \\ 14 & 24 \\ 20 & 30 \end{matrix}$$

= (12 × 24 × 33) + (22 × 27 × 20) + (25 × 14 × 30) – (22 × 14 × 33) - (12 × 27 × 30) - (25 × 24 × 20)

= 0

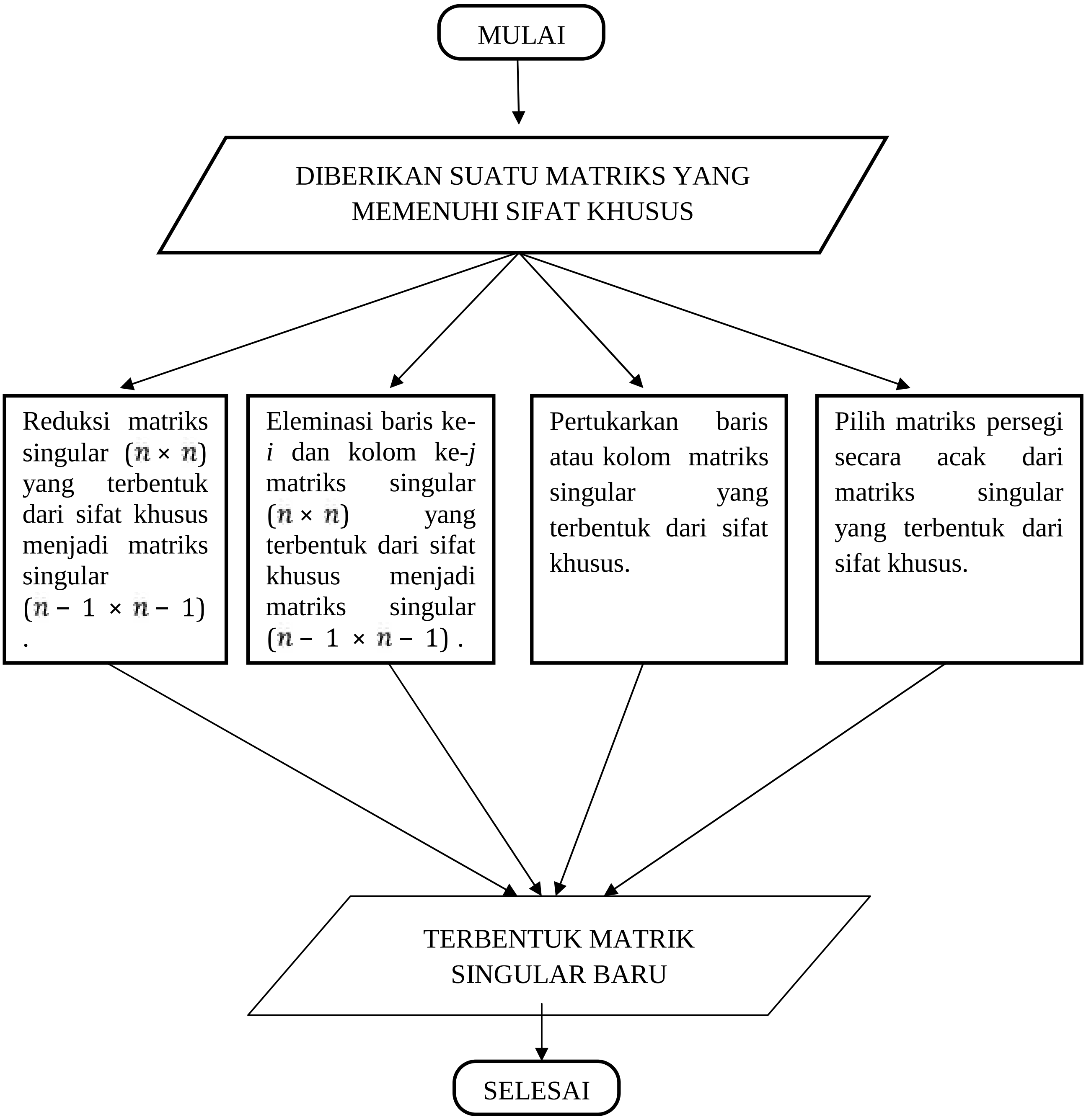
Jadi, matriks A adalah matriks singular.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Tugas akhir ini disusun atas suatu kerangka pemikiran yang langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Diberikan suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.
2. Konstruksi matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus, dengan cara sebagai berikut :
   a. Mereduksi matriks singular $(n \times n)$ yang terbentuk dari sifat khusus menjadi matriks singular $n - 1 \times (n - 1)$, sehingga terbentuk matriks singular baru.
   b. Mengeleminasi baris ke-*i* dan kolom ke-*j* matriks singular $(n \times n)$ yang terbentuk dari sifat khusus menjadi matriks singular $(n - 1) \times (n - 1)$, sehingga terbentuk matriks singular baru.
   c. Mempertukarkan baris atau kolom matriks singular yang terbentuk dari sifat khusus, sehingga terbentuk matriks singular baru.
   d. Memilih matriks persegi secara acak dari matriks singular yang terbentuk dari sifat khusus, sehingga terbentuk matriks singular baru.

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut :



Gambar 3.1 *Flowchart* Cara Mengkonstruksi Matriks Singular dari Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus

BAB IV

ANALISA DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan membahas tentang proses mengkonstruksi matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus. Mengkonstruksi matriks singular dapat dilakukan dengan empat cara sebagai berikut :

4.1 Konstruksi Matriks Singular dengan Mereduksi Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus

Teorema 4.1 (K. Arulmani, 2012) Matriks $A_{n\times n}$ yang memenuhi sifat khusus dapat direduksi menjadi matriks $B_{n-1\times(n-1)}$ yang juga memenuhi sifat khusus, sehingga B adalah matriks singular.

Bukti :

Misalkan $A_{n\times n}$ adalah matriks yang memenuhi sifat khusus. Ditulis

$$A_{n\times n} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Karena matriks A memenuhi sifat khusus, maka matriks A memenuhi persamaan umum sebagai berikut :

$$a_{ij} - a_{i(j+1)} = a_{(i+1)j} - a_{(i+1)(j+1)},$$
$$\forall\, j = 1,2,3,\dots,(n-1),\ i = 1,2,3,\dots,\ n-1\ . \quad (4.1)$$

Matriks A direduksi menjadi matriks $B_{n-1\times(n-1)}$ sebagai berikut:

$$B_{n-1\times n-1} = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1(n-2)} & b_{1(n-1)} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2(n-2)} & b_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{(n-3)1} & b_{(n-3)2} & \cdots & b_{n-3\,(n-2)} & b_{n-3\,(n-1)} \\ b_{(n-2)1} & b_{(n-2)2} & \cdots & b_{n-2\,(n-2)} & b_{n-2\,(n-1)} \\ b_{(n-1)1} & b_{(n-1)2} & \cdots & b_{n-1\,(n-2)} & b_{n-1\,(n-1)} \end{matrix}$$

dengan

$b_{11} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}.$

$b_{12} = a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23}.$

$b_{13} = a_{13} + a_{14} + a_{23} + a_{24}.$

$b_{14} = a_{14} + a_{15} + a_{24} + a_{25}.$

$\vdots$

$b_{1(n-1)} = a_{1(n-1)} + a_{1n} + a_{2(n-1)} + a_{2n}.$

$b_{21} = a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}.$

$b_{22} = a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33}.$

$b_{23} = a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34}.$

$b_{24} = a_{24} + a_{25} + a_{34} + a_{35}.$

$\vdots$

$b_{2(n-1)} = a_{2(n-1)} + a_{2n} + a_{3(n-1)} + a_{3n}.$

$b_{31} = a_{31} + a_{32} + a_{41} + a_{42}.$

$b_{32} = a_{32} + a_{33} + a_{42} + a_{43}.$

$b_{33} = a_{33} + a_{34} + a_{43} + a_{44}.$

$b_{34} = a_{34} + a_{35} + a_{44} + a_{45}.$

$\vdots$

$b_{3(n-1)} = a_{3(n-1)} + a_{3n} + a_{4(n-1)} + a_{4n}.$

$\vdots$

$b_{(n-2)1} = a_{(n-2)1} + a_{n-2\ 2} + a_{(n-1)1} + a_{n-1\ 2}.$

$b_{(n-2)2} = a_{(n-2)2} + a_{n-2\ 3} + a_{(n-1)2} + a_{n-1\ 3}.$

$b_{(n-2)3} = a_{(n-2)3} + a_{n-2\ 4} + a_{(n-1)3} + a_{n-1\ 4}.$

$b_{(n-2)4} = a_{(n-2)4} + a_{n-2\ 5} + a_{(n-1)4} + a_{n-1\ 5}.$

$\vdots$

$b_{n-2\ (n-1)} = a_{n-2\ (n-1)} + a_{n-2\ n} + a_{n-1\ (n-1)} + a_{n-1\ n}.$

$$b_{(n-1)1} = a_{(n-1)1} + a_{n-1\ 2} + a_{n1} + a_{n2}.$$
$$b_{(n-1)2} = a_{(n-1)2} + a_{n-1\ 3} + a_{n2} + a_{n3}.$$
$$b_{(n-1)3} = a_{(n-1)3} + a_{n-1\ 4} + a_{n3} + a_{n4}.$$
$$b_{(n-1)4} = a_{(n-1)4} + a_{n-1\ 5} + a_{n4} + a_{n5}.$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1\ (n-1)} = a_{n-1\ (n-1)} + a_{n-1\ n} + a_{n(n-1)} + a_{nn}.$$

Persamaan-persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{i\ j+1} + a_{i+1\ j} + a_{i+1\ \ j+1},$$
$$\forall j = 1,2,3,\dots,(n-1), i = 1,2,3,\dots, n-1 . \tag{4.2}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan B memenuhi sifat khusus. Artinya akan ditunjukkan:

$$b_{11} - b_{12} = b_{21} - b_{22} = b_{31} - b_{32} = \cdots = b_{(n-1)1} - b_{(n-1)2}.$$
$$b_{12} - b_{13} = b_{22} - b_{23} = b_{32} - b_{33} = \cdots = b_{n-1\ 2} - b_{n-1\ 3}.$$
$$b_{13} - b_{14} = b_{23} - b_{24} = b_{33} - b_{34} = \cdots = b_{n-1\ 3} - b_{n-1\ 4}.$$
$$b_{14} - b_{15} = b_{24} - b_{25} = b_{34} - b_{35} = \cdots = b_{n-1\ 4} - b_{n-1\ 5}.$$
$$\vdots$$
$$b_{1(n-2)} - b_{1(n-1)} = b_{2(n-2)} - b_{2(n-1)} = \cdots = b_{n-1\ (n-2)} - b_{(n-1)\ n-1} .$$

Persamaan-persamaan di atas dapat ditulis secara umum sebagai berikut:

$$b_{1j} - b_{1(j+1)} = b_{2j} - b_{2(j+1)} = b_{3j} - b_{3(j+1)} = \cdots = b_{n-1\ j} - b_{n-1\ (j+1)}\ \forall j = 1,2,3,\dots, n-2 . \tag{4.3}$$

atau secara umum akan ditunjukkan :

$$b_{ij} - b_{i\ j+1} = b_{i+1\ j} - b_{i+1\ \ j+1}, \forall i = 1,2,\dots, n-2 , j = 1,2,\dots, n-2 . \tag{4.4}$$

Berdasarkan persamaan (4.1) diperoleh :

$$a_{ij} - a_{i\ j+1} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+1}$$

$$\underline{a_{i(j+1)} - a_{i\ j+2} = a_{i+1\ (j+1)} - a_{i+1\ \ j+2}} \qquad -$$

$$a_{ij} - a_{i\ j+2} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+2} \tag{4.5}$$

$$a_{ij} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+2} + a_{i\ j+2} \tag{4.6}$$

Selanjutnya akan dibuktikan $b_{ij} - b_{i\ j+1} = b_{i+1\ j} - b_{i+1\ \ j+1}$, $\forall\, i = 1,2,\dots,\ n-1\ , j = 1,2,\dots,\ n-2$.

Subsitusikan persamaan (4.2) ke persamaan (4.4) diperoleh:

$$\begin{aligned} b_{ij} - b_{i\ j+1} &= a_{ij} + a_{i\ j+1} + a_{i+1\ j} + a_{i+1\ \ j+1} - a_{i\ j+1} - \\ &\quad a_{i\ j+2} - a_{i+1\ \ j+1} - a_{i+1\ \ j+2} . \\ &= a_{ij} + a_{i+1\ j} - a_{i\ j+2} - a_{i+1\ \ j+2} . \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.6), $a_{ij} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+2} + a_{i\ j+2}$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} b_{ij} - b_{i\ j+1} &= (a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+2} + a_{i\ j+2}) + (a_{i+2\ j} - \\ &\quad a_{(i+2)\ j+2} + a_{i+1\ \ j+2}) - (a_{i+1\ (j+2)} - a_{i+1\ \ j+2} + \\ &\quad a_{i\ j+2}) - (a_{i+1\ (j+2)} - a_{i+1\ \ j+2} + a_{(i+1)\ j+2} . \\ &= a_{i+1\ j} + a_{i+2\ j} - a_{i+1\ \ j+2} - a_{(i+2)\ j+2} . \\ &= b_{i+1\ j} - b_{i+1\ \ j+1} . \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa matriks B memenuhi sifat khusus. Berdasarkan Teorema (2.2) B adalah matriks singular. ■

Contoh 4.1 :

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 2 & 5 & 7 & 10 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 4 & 7 & 9 & 12 \end{matrix}$ adalah matriks yang memenuhi sifat khusus, sehingga det(A) = 0. Buatlah matriks singular baru dengan cara mereduksi matriks !

Penyelesaian :

Cara mereduksi matriks A adalah sebagai berikut :

b_{11} = 2 + 5 + 1 + 4 = 12

b_{12} = 5 + 7 + 4 + 6 = 22

b_{11} = 7 + 10 + 6 + 9 = 32

b_{21} = 1 + 4 + 3 + 6 = 14

b_{22} = 4 + 6 + 6 + 8 = 24

b_{23} = 6 + 9 + 8 + 11 = 34

b_{31} = 3 + 6 + 4 + 7 = 20

b_{32} = 6 + 8 + 7 + 9 = 30

b_{33} = 8 + 11 + 9 + 12 = 40

sehingga diperoleh matriks B sebagai berikut :

$$B = \begin{matrix} 12 & 22 & 32 \\ 14 & 24 & 34 \\ 20 & 30 & 40 \end{matrix}$$

Perhatikan bahwa matriks B juga memenuhi sifat khusus. Menurut Teorema (2.2) diperoleh det(B) = 0. Jadi B singular.

4.2 Konstruksi Matriks Singular dengan Menghapus Baris dan Kolom Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus

Teorema 4.2 (K. Arulmani, 2012) Misalkan matriks A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi sifat khusus. Matriks $A^*_{n-1 \ n-1}$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke$-b$ dan kolom ke$-k$ adalah matriks singular.

Bukti :

$$\text{Misal } A_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{b-1\ 1} & a_{b-1\ 2} & \cdots & a_{(b-1)(k-1)} & a_{(b-1)k} & a_{(b-1)(k+1)} & \cdots & a_{(b-1)n} \\ a_{b1} & b_{b2} & \cdots & a_{b(k-1)} & a_{bk} & a_{b(k+1)} & \cdots & a_{bn} \\ a_{b+1\ 1} & b_{(b+1)2} & \cdots & a_{(b+1)(k-1)} & a_{(b+1)k} & a_{(b+1)(k+1)} & \cdots & a_{(b+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diketahui matriks A memenuhi sifat khusus, artinya:

$$a_{ij} - a_{i\ j+1} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ j+1}, \forall j = 1,2,3,\dots,(n-1),$$
$$i = 1,2,3,\dots, n \ . \qquad (4.7)$$

Hapus baris ke$-b$ dan kolom ke$-k$ dari matriks A diperoleh matriks A^* sebagai berikut:

$$A^*_{n-1\ (n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{b-1\ 1} & a_{b-1\ 2} & \cdots & a_{(b-1)(k-1)} & a_{(b-1)(k+1)} & \cdots & a_{(b-1)n} \\ a_{b+1\ 1} & b_{(b+1)2} & \cdots & a_{(b+1)(k-1)} & a_{(b+1)(k+1)} & \cdots & a_{(b+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{bn} \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan A^* juga memenuhi sifat khusus, artinya hanya akan dibuktikan :

$$a_{1(k-1)} - a_{1\ k+1} = a_{2\ k-1} - a_{2\ k+1} = \cdots = a_{(b-1)(k-1)} - a_{(b-1)\ k+1} =$$
$$a_{(b+1)\ k-1} - a_{(b+1)\ k+1} = \cdots = a_{n\ k-1} - a_{n(k+1)} \ .$$

atau secara umum:

$$a_{i\ k-1} - a_{i\ k+1} = a_{i+1\ \ k-1} - a_{i+1\ \ k+1}, \forall i = 1,2,3,\ldots, n, i \neq b-1$$

dan $i \neq b$. (4. 8)

dan

$$a_{b-1\ \ k-1} - a_{b-1\ \ k+1} = a_{b+1\ \ k-1} - a_{b+1\ \ k+1}, \forall i = 1,2,3,\ldots,n,$$

$i \neq b$. (4.9)

Untuk $j = (k-1)$, persamaan (4.1) menjadi :

$$a_{i(k-1)} - a_{ik} = a_{(i+1)\ k-1} - a_{i+1\ k}, \forall i = 1,2,3,\ldots,n. \quad (4.10)$$

Untuk $j = k$, persamaan (4.1) menjadi:

$$a_{ik} - a_{i\ k+1} = a_{(i+1)k} - a_{i+1\ \ k+1}, \forall i = 1,2,3,\ldots,n. \quad (4.11)$$

Persamaan (4.10) dan (4.11) dieliminasi maka diperoleh:

$$a_{i\ k-1} - a_{ik} = a_{i+1\ \ k-1} - a_{i+1\ k}, \forall i = 1,2,3,\ldots,n.$$

$$a_{ik} - a_{i\ k+1} = a_{(i+1)k} - a_{i+1\ \ k+1}, \forall i = 1,2,3,\ldots,n. \quad +$$

$$a_{i\ k-1} - a_{i\ k+1} = a_{i+1\ \ k-1} - a_{i+1\ \ k+1}, \forall i = 1,2,3,\ldots,n. \quad (4.12)$$

Untuk $i = b-1$ diperoleh

$$a_{(b-1)\ k-1} - a_{(b-1)\ k+1} = a_{b\ k-1} - a_{b\ k+1}. \quad (4.13)$$

Untuk $i = b$ diperoleh

$$a_{b\ k-1} - a_{b\ k+1} = a_{b+1\ \ k-1} - a_{b+1\ \ k+1}. \quad (4.14)$$

Persamaan (4.13) dan (4.14) dieliminasi maka diperoleh:

$$a_{(b-1)\ k-1} - a_{(b-1)\ k+1} = a_{b\ k-1} - a_{b\ k+1}.$$

$$a_{b\ k-1} - a_{b\ k+1} = a_{b+1\ \ k-1} - a_{b+1\ \ k+1}. \quad +$$

$$a_{(b-1)\ k-1} - a_{(b-1)\ k+1} = a_{b+1\ \ k-1} - a_{b+1\ \ k+1}. \quad (4.15)$$

Jadi, terbukti bahwa A^* juga memenuhi sifat khusus. Karena A^* memenuhi sifat khusus, berdasarkan Teorema (2.2) A^* juga singular. ■

Contoh 4.2 :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang memenuhi sifat khusus, sehingga $\det(A) = 0$. Bentuklah matriks singular baru dengan cara menghapus baris ke-2 dan kolom ke-3 dari matriks !

Penyelesaian :

Misal A^* diperoleh dengan menghapus baris ke-2 dan kolom ke-3 dari matriks A diperoleh matriks sebagai berikut :

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa matriks A^* juga memenuhi sifat khusus. Menurut Teorema (2.2) diperoleh $\det(A^*) = 0$. Jadi A^* singular.

4.3 Konstruksi Matriks Singular dengan Mempertukarkan Baris dan Kolom Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus

Teorema 4.3 (K. Arulmani, 2012) Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi sifat khusus. Jika A^* adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan dua baris atau dua kolom dari A, maka A^* adalah matriks singular.

Bukti:

a. Baris yang dipertukarkan

Misalkan $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ a_{b1} & a_{b2} & a_{b3} & a_{b4} \cdots & a_{bn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ a_{c1} & a_{c2} & a_{c3} & a_{c4} \cdots & a_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Matriks A memenuhi sifat khusus, artinya:

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = \cdots = a_{b1} - a_{b2} = \cdots = a_{c1} - a_{c2} = \cdots = a_{n1} - a_{n2}.$$

$$a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = \cdots = a_{b2} - a_{b3} = \cdots = a_{c2} - a_{c3} = \cdots = a_{n2} - a_{n3}.$$

$$a_{13} - a_{14} = a_{23} - a_{24} = \cdots = a_{b3} - a_{b4} = \cdots = a_{c3} - a_{c4} = \cdots = a_{n3} - a_{n4}.$$

$$a_{14} - a_{15} = a_{24} - a_{25} = \cdots = a_{b4} - a_{b5} = \cdots = a_{c4} - a_{c5} = \cdots = a_{n4} - a_{n5}.$$

$$\vdots$$

$$a_{1(n-1)} - a_{1n} = a_{2(n-1)} - a_{2n} = \cdots = a_{b(n-1)} - a_{bn} = \cdots = a_{c(n-1)} - a_{cn} = \ldots = a_{n(n-1)} - a_{nn}.$$

Persamaan di atas dapat diperumum menjadi:

$$a_{1j} - a_{1(j+1)} = a_{2j} - a_{2(j+1)} = \cdots = a_{bj} - a_{b(j+1)} = \cdots = a_{cj} - a_{c(j+1)} = \cdots = a_{nj} - a_{n(j+1)},\ \forall j = 1,2,3,\ldots,\ n-1\ . \qquad (4.16)$$

Dipertukarkan baris ke-b dengan baris ke-c maka diperoleh matriks A^* sebagai berikut:

$$A^*_{(n\times n)} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots & \vdots \\ a_{c1} & a_{c2} & a_{c3} & a_{c4}\cdots & a_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots & \vdots \\ a_{b1} & a_{b2} & a_{b3} & a_{b4}\cdots & a_{bn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4}\cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Akan dibuktikan A^* memiliki sifat khusus,

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = \cdots = a_{c1} - a_{c2} = \cdots = a_{b1} - a_{b2} = \cdots = a_{n1} - a_{n2}.$$

$$a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = \cdots = a_{c2} - a_{c3} = \cdots = a_{b2} - a_{b3} = \cdots = a_{n2} - a_{n3}.$$

$$a_{13} - a_{14} = a_{23} - a_{24} = \cdots = a_{c3} - a_{c4} = \cdots = a_{b3} - a_{b4} = \cdots = a_{n3} - a_{n4}.$$

$$a_{14} - a_{15} = a_{24} - a_{25} = \cdots = a_{c4} - a_{c5} = \cdots = a_{b4} - a_{b5} = \cdots = a_{n4} - a_{n5}.$$

$$\vdots$$

$$a_{1\ n-1} - a_{1n} = a_{2\ n-1} - a_{2n} = \cdots = a_{c\ n-1} - a_{cn} = \cdots = a_{b\ n-1} - a_{bn} = \ldots = a_{n(n-1)} - a_{nn}.$$

Persamaan di atas dapat diperumum menjadi:

$$a_{1j} - a_{1(j+1)} = a_{2j} - a_{2(j+1)} = \cdots = a_{cj} - a_{c(j+1)} = \cdots = a_{bj} - a_{b(j+1)} = \cdots = a_{nj} - a_{n(j+1)}, \forall j = 1,2,3, \dots, n-1 \; . \qquad (4.17)$$

Perhatikan bahwa persamaan (4.16) sama dengan persamaan (4.17), sehingga persamaan (4.17) langsung terbukti.

Jadi, terbukti bahwa matriks A^* juga memenuhi sifat khusus. Berdasarkan Teorema (2.2) A^* adalah matriks singular. ■

Contoh 4.3 :

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{matrix}$ adalah matriks yang memenuhi sifat khusus. $\det(A) = 0$. Buatlah matriks baru dengan cara mempertukarkan baris pertama dengan baris ke-2 dari matriks A dan tunjukkan bahwa matriks baru yang terbentuk juga singular!

Penyelesaian :

Misal matriks A^* adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris pertama dengan baris ke-2 dari matriks A maka diperoleh

$$A^* = \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{matrix}$$

Perhatikan bahwa A^* memenuhi sifat khusus. Menurut Teorema (2.2) $\det(A^*) = 0$. Jadi A^*adalah matriks singular.

b. Kolom yang dipertukarkan

Misalkan

$$A_{n\times n} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,k-1} & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1\,l-1} & a_{1l} & a_{1(l+1)} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2(l-1)} & a_{2l} & a_{2(l+1)} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(k-1)} & a_{3k} & a_{3\,k+1} & \cdots & a_{3(l-1)} & a_{3l} & a_{3(l+1)} \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4(k-1)} & a_{4k} & a_{4(k+1)} & \cdots & a_{4(l-1)} & a_{4l} & a_{4(l+1)} \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \;\ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{n(l-1)} & a_{nl} & a_{n(l+1)} \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Diketahui matriks A memenuhi sifat khusus, artinya:

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = \dots = a_{n-1\ 1} - a_{n-1\ 2} = a_{n1} - a_{n2}. \tag{4.18}$$

$$a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = \dots = a_{n-1\ 2} - a_{n-1\ 3} = a_{n2} - a_{n3}. \tag{4.19}$$

$$\vdots$$

$$a_{1(k-1)} - a_{1k} = a_{2(k-1)} - a_{2k} = \dots = a_{n-1\ (k-1)} - a_{n-1\ k} = a_{n(k-1)} - a_{nk}. \tag{4.20}$$

$$a_{1k} - a_{1(k+1)} = a_{2k} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nk} - a_{n\ k+1}. \tag{4.21}$$

$$a_{1(k+1)} - a_{1(k+2)} = a_{2(k+1)} - a_{2(k+2)} = \dots = a_{n-1\ (k+1)} - a_{n-1\ (k+2)} = a_{n(k+1)} - a_{n\ k+2}. \tag{4.22}$$

$$\vdots$$

$$a_{1(l-2)} - a_{1(l-1)} = a_{2(l-2)} - a_{2(l-1)} = \dots = a_{n-1\ (l-2)} - a_{n-1\ (l-1)} = a_{n(l-2)} - a_{n\ l-1}. \tag{4.23}$$

$$a_{1(l-1)} - a_{1l} = a_{2(l-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(l-1)} - a_{nl}. \tag{4.24}$$

$$a_{1l} - a_{1(l+1)} = a_{2l} - a_{2(l+1)} = \dots = a_{n-1\ l} - a_{n-1\ (l+1)} = a_{nl} - a_{n(l+1)}. \tag{4.25}$$

$$\vdots$$

$$a_{1(n-1)} - a_{1n} = a_{2(n-1)} - a_{2n} = \dots = a_{n-1\ (n-1)} - a_{n-1\ n} = a_{n(n-1)} - a_{nn}. \tag{4.26}$$

Matriks A^* adalah matriks yang diperoleh dari A dengan mempertukarkan kolom ke-k dengan kolom ke-l dari matriks A, sehingga diperoleh :

$$A^* = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ k-1} & a_{1l} & a_{1\ k+1} & \cdots & a_{1\ l-1} & a_{1k} & a_{1(l+1)} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2l} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2(l-1)} & a_{2k} & a_{2(l+1)} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(k-1)} & a_{3l} & a_{3\ k+1} & \cdots & a_{3(l-1)} & a_{3k} & a_{3(l+1)} \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4(k-1)} & a_{4l} & a_{4(k+1)} & \cdots & a_{4(l-1)} & a_{4k} & a_{4(l+1)} \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nl} & a_{n\ k+1} & \cdots & a_{n(l-1)} & a_{nk} & a_{n(l+1)} \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Akan dibuktikan A^* memenuhi sifat khusus, artinya :

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} = \dots = a_{n-1\ 1} - a_{n-1\ 2} = a_{n1} - a_{n2}.$$

$$a_{12} - a_{13} = a_{22} - a_{23} = \dots = a_{n-1\ 2} - a_{n-1\ 3} = a_{n2} - a_{n3}.$$

$$\vdots$$

$$a_{1(k-1)} - a_{1l} = a_{2(k-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (k-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(k-1)} - a_{nl}.$$

$$a_{1l} - a_{1(k+1)} = a_{2l} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ l} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nl} - a_{n(k+1)}.$$

$$\vdots$$

$$a_{1(l-1)} - a_{1k} = a_{2(l-1)} - a_{2k} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ k} = a_{n(l-1)} - a_{nk}.$$

$$a_{1k} - a_{1(l+1)} = a_{2k} - a_{2(l+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (l+1)} = a_{nk} - a_{n\ l+1}.$$

$$\vdots$$

$$a_{1(n-1)} - a_{1n} = a_{2(n-1)} - a_{2n} = \dots = a_{n-1\ (n-1)} - a_{n-1\ n} = a_{n(n-1)} - a_{nn}.$$

Persamaan-persamaan di atas sama dengan persamaan (2.1) kecuali,

$$a_{1(k-1)} - a_{1l} = a_{2(k-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (k-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(k-1)} - a_{nl}.$$

$$a_{1l} - a_{1(k+1)} = a_{2l} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ l} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nl} - a_{n(k+1)}.$$

$$a_{1(l-1)} - a_{1k} = a_{2(l-1)} - a_{2k} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ k} = a_{n(l-1)} - a_{nk}.$$

$$a_{1k} - a_{1(l+1)} = a_{2k} - a_{2(l+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (l+1)} = a_{nk} - a_{n\ l+1}.$$

Sehingga cukup dibuktikan empat persamaan di atas saja.

Eliminasi persamaan (4.20) sampai dengan persamaan (4.24) diperoleh:

$$a_{1(k-1)} - a_{1k} = a_{2(k-1)} - a_{2k} = \dots = a_{n-1\ (k-1)} - a_{n-1\ k} = a_{n(k-1)} - a_{nk}. \tag{4.20}$$

$$a_{1k} - a_{1(k+1)} = a_{2k} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nk} - a_{n\ k+1}. \tag{4.21}$$

$$\vdots$$

$$a_{1(l-2)} - a_{1(l-1)} = a_{2(l-2)} - a_{2(l-1)} = \dots = a_{n-1\ (l-2)} - a_{n-1\ (l-1)} = a_{n(l-2)} - a_{n\ l-1}. \tag{4.23}$$

$$a_{1(l-1)} - a_{1l} = a_{2(l-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(l-1)} - a_{nl}. \tag{4.24}$$

+

$$a_{1(k-1)} - a_{1l} = a_{2(k-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (k-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(k-1)} - a_{nl}. \tag{4.27}$$

Eliminasi persamaan (4.22) sampai dengan persamaan (4.24), diperoleh:

$$a_{1(k+1)} - a_{1(k+2)} = a_{2(k+1)} - a_{2(k+2)} = \dots = a_{n-1\ (k+1)} - a_{n-1\ (k+2)} = a_{n(k+1)} - a_{n\ k+2}. \tag{4.22}$$

$$a_{1(k+2)} - a_{1(k+3)} = a_{2(k+2)} - a_{2(k+3)} = \dots = a_{n-1\ (k+2)} - a_{n-1\ (k+3)} = a_{n(k+2)} - a_{n\ k+3}.$$

$$\vdots$$

$$a_{1(l-2)} - a_{1(l-1)} = a_{2(l-2)} - a_{2(l-1)} = \dots = a_{n-1\ (l-2)} - a_{n-1\ (l-1)} = a_{n(l-2)} - a_{n(l-1)}. \tag{4.23}$$

$$a_{1(l-1)} - a_{1l} = a_{2(l-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(l-1)} - a_{nl}. \tag{4.24}$$

+

$$a_{1(k+1)} - a_{1l} = a_{2(k+1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (k+1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(k+1)} - a_{nl}. \tag{4.28}$$

kalikan semua ruas pada persamaan (4.28) dengan (-1) sehingga diperoleh:

$$a_{1l} - a_{1(k+1)} = a_{2l} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ l} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nl} - a_{n\ k+1}. \tag{4.29}$$

Eliminasi persamaan (4.21) sampai dengan persamaan (4.23), diperoleh:

$$a_{1k} - a_{1(k+1)} = a_{2k} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nk} - a_{n\ k+1}. \qquad (4.21)$$

$$a_{1(k+1)} - a_{1(k+2)} = a_{2(k+1)} - a_{2(k+2)} = \dots = a_{n-1\ (k+1)} - a_{n-1\ (k+2)} = a_{n(k+1)} - a_{n\ k+2}. \qquad (4.22)$$

$$\vdots$$

$$a_{1(l-3)} - a_{1(l-2)} = a_{2(l-3)} - a_{2(l-2)} = \dots = a_{n-1\ (l-3)} - a_{n-1\ (l-2)} = a_{n(l-3)} - a_{n(l-2)}.$$

$$a_{1(l-2)} - a_{1(l-1)} = a_{2(l-2)} - a_{2(l-1)} = \dots = a_{n-1\ (l-2)} - a_{n-1\ (l-1)} = a_{n(l-2)} - a_{n(l-1)}. \qquad (4.23)$$

$+$

$$a_{1k} - a_{1(l-1)} = a_{2k} - a_{2(l-1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (l-1)} = a_{nk} - a_{n\ l-1}. \qquad (4.30)$$

kalikan semua ruas persamaan (4.30) dengan (-1) sehingga diperoleh:

$$a_{1(l-1)} - a_{1k} = a_{2(l-1)} - a_{2k} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ k} = a_{n(l-1)} - a_{nk}. \qquad (4.32)$$

Eliminasi persamaan (4.21) sampai dengan persamaan (4.25), diperoleh:

$$a_{1k} - a_{1(k+1)} = a_{2k} - a_{2(k+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (k+1)} = a_{nk} - a_{n\ k+1}. \qquad (4.21)$$

$$a_{1(k+1)} - a_{1(k+2)} = a_{2(k+1)} - a_{2(k+2)} = \dots = a_{n-1\ (k+1)} - a_{n-1\ (k+2)} = a_{n(k+1)} - a_{n(k+2)}. \qquad (4.22)$$

$$\vdots$$

$$a_{1(l-1)} - a_{1l} = a_{2(l-1)} - a_{2l} = \dots = a_{n-1\ (l-1)} - a_{n-1\ l} = a_{n(l-1)} - a_{nl}. \qquad (4.24)$$

$$a_{1l} - a_{1(l+1)} = a_{2l} - a_{2(l+1)} = \dots = a_{n-1\ l} - a_{n-1\ (l+1)} = a_{nl} - a_{n\ l+1}. \qquad (4.25)$$

$+$

$$a_{1k} - a_{1(l+1)} = a_{2k} - a_{2(l+1)} = \dots = a_{n-1\ k} - a_{n-1\ (l+1)} = a_{nk} - a_{n\ l+1}. \qquad (4.32)$$

Jadi, terbukti bahwa matriks A^* memenuhi sifat khusus. Menurut Teorema (2.2) A^* merupakan matriks singular. ■

Contoh 4.4 :

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{matrix}$ memenuhi sifat khusus, sehingga det(A) = 0. Buatlah matriks singular baru dengan cara mempertukarkan kolom ke-3 dengan kolom pertama dari matriks !

Penyelesaian :

Misal matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan kolom ke-3 dengan kolom pertama dari matriks A diperoleh $B = \begin{matrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{matrix}$

Dapat dilihat bahwa B juga memenuhi sifat khusus. Berdasarkan teorema (2.2) diperoleh $\det(B) = 0$. Jadi matriks B adalah singular.

4.4 Konstruksi Matriks Singular dengan Memilih Matriks Persegi secara Acak dari Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus

Teorema 4.4 (K. Arulmani, 2012) Misalkan matriks A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi sifat khusus. Jika matriks B adalah matriks persegi sebarang yang dipilih di dalam matriks A, maka matriks B juga memenuhi sifat khusus. Sehingga matriks B juga singular.

Bukti :

Misalkan

$$A_{(n\times n)} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1\ k+1} & \cdots & a_{1\ k+m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2\ k+1} & \cdots & a_{2\ k+m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b1} & a_{b2} & \cdots & a_{bk} & a_{b\ k+1} & \cdots & a_{b\ k+m} & \cdots & a_{bn} \\ a_{b+1\ 1} & a_{b+1\ 2} & \cdots & a_{b+1\ k} & a_{b+1\ \ k+1} & \cdots & a_{b+1\ \ k+m} & \cdots & a_{b+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b+m\ 1} & a_{b+m\ 2} & \cdots & a_{b+m\ k} & a_{b+m\ \ k+1} & \cdots & a_{b+m\ \ k+m} & \cdots & a_{b+m\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{n\ k+1} & \cdots & a_{n\ k+m} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Diketahui matriks A memenuhi sifat khusus, artinya:

$a_{ij} - a_{i\ j+1} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+1}$, $\forall j = 1,2,3,\dots, n-1$, $i = 1,2,3,\dots, n-1$.

Matriks B adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara memilih sebarang matriks persegi secara acak di dalam matriks A. Misal dipilih

$$B = \begin{matrix} a_{bk} & a_{b(k+1)} & \cdots & a_{b(k+m)} \\ a_{(b+1)k} & a_{b+1\ (k+1)} & \cdots & a_{b+1\ (k+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(b+m)k} & a_{(b+m)(k+1)} & \cdots & a_{b+m\ (k+m)} \end{matrix}$$

Akan dibuktikan B memenuhi sifat khusus.

Karena $1 \le b \le b+m \le n$ dan $1 \le k \le k+m \le n$ maka diperoleh

$a_{ij} - a_{i\ j+1} = a_{i+1\ j} - a_{i+1\ \ j+1}$, $\forall i = b, b+1 \dots, b+m$,

$j = k, k+1, \dots, k+m$

Jadi, terbukti bahwa matriks B juga memenuhi sifat khusus. Menurut Teorema (2.2), B merupakan matriks singular. ■

Contoh 2.5:

Misalkan $A = \begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$

matriks yang memenuhi sifat khusus, sehingga det(A) = 0. Buatlah matriks singular baru dengan cara memilih matrik persegi secara acak dari matriks A!

Penyelesaian :

Matriks B adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara memilih sebarang matriks 3 × 3 secara acak di dalam matriks A. Misal dipilih

$$B = \begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 5 \end{matrix}$$

Dapat dilihat bahwa B juga memenuhi sifat khusus. Menurut Teorema (2.2) diperoleh det(B) = 0. Jadi matriks B adalah singular.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Matriks singular sangat penting dalam sistem kriptografi, sehingga sangat dibutuhkan konstruksi matriks singular. Mengkonstruksi matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus dapat dilakukan dengan empat cara sebagai berikut :

1. Mereduksi Suatu Matriks yang Memenuhi Sifat Khusus

   Matriks $A_{n \times n}$ yang memenuhi sifat khusus dapat direduksi menjadi matriks $B_{n-1 \times (n-1)}$ yang juga memenuhi sifat khusus, sehingga B adalah matriks singular.
2. Menghapus Baris dan Kolom

   Misalkan matriks A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi sifat khusus. Matriks $A_{n-1 \quad n-1}$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke$-$ b dan kolom ke$-$ k adalah matriks singular.
3. Pertukaran Baris dan Kolom

   Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi sifat khusus. Jika A^* adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan dua baris atau dua kolom dari A, maka A^* adalah matriks singular
4. Memilih Matriks Persegi Secara Acak

   Misalkan matriks A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi sifat khusus. Matriks B adalah matriks persegi sebarang yang dipilih di dalam matriks A dan matriks B juga memenuhi sifat khusus. Sehingga matriks B juga singular.

5.2 Saran

Penulis hanya membedah empat cara untuk mengkonstruksi matriks singular di dalam tugas akhir ini, sehingga penulis mengharapkan kepada pembaca agar melakukan penelitian lebih lanjut dengan menggunakan cara lain untuk mengkonstruksi matriks singular dari suatu matriks yang memenuhi sifat khusus.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. , "*Aljabar Linier Elementer*", Penerbit Erlangga, 2000. Jakarta.

Arulmani, K., "*New Perspective on a Singular Matrix Formation*", Int. Journal of Theoretical and Applied Information Technology Accepted, 2012, India.

Arulmani, K. and Chadrasekhara Rao K., "*Reduction Theorem on Singular Matrix with Spesial Properties* ", Int. Journal of Math. Analysis, 2012, India.

G. Cullen, Charles, "*Aljabar Linier dengan Penerapannya* ", PT. Gramedia Pustaka Utama, 1993, Jakarta.

Munir, Rinaldi, "*Matematika Distrit* ", Informatika Bandung, 2007, Bandung.

Ruminta. " *Matriks Persamaan Linier dan Pemograman Linier* ", Rekayasa Sains, 2009, Bandung.

Santosa, Gunawan R ., "*Aljabar Linear Dasar* ", Andi Yogyakarta. 2009, Yogyakarta.

http://id.wikipedia.determinan. 20 Juli 2013, 08:00 WIB.

http://www.pendidikan-matriks-dan-determinan.html 20 Agustus 2013, 09:00 WIB.